Sesión preparatoria OME
Problemas de Olimpiada de combinatoria, juegos y estrategia

24 de Febrero de 2017

Nota: Los problemas que tengan marcado un año, son problemas de la fase nacional de la Olimpiada Matemática Española de ese año.

1. **(2009)** Halla todas las sucesiones finitas de n números naturales consecutivos $a_1, a_2, \dots, a_n$, con $n \geq 3$, tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2009$.

2. **(2009)** Se pintan de rojo algunas de las aristas de un poliedro regular. Se dice que una coloración de este tipo es *buena*, si para cada vértice del poliedro, existe una arista que concurre en dicho vértice y no está pintada de rojo. Por otra parte, se dice que una coloración donde se pintan de rojo algunas de las aristas de un poliedro regular es *completamente buena*, si, además de ser *buena*, ninguna cara del poliedro tiene todas sus aristas pintadas de rojo. ¿Para qué poliedros regulares es igual el número máximo de aristas que se pueden pintar en una coloración *buena*, y en una *completamente buena*? Justifica la respuesta.

3. **(2008)** A cada punto del plano se le asigna un solo color entre siete colores distintos. ¿Existirá un trapecio inscriptible en una circunferencia cuyos vértices tengan todos el mismo color?

4. **(2007)** ¿Cuáles son los números enteros positivos que se pueden obtener de exactamente 2007 maneras distintas, como la suma de al menos dos números enteros positivos consecutivos? ¿Cuál es el menor de todos ellos?

   Ejemplo: el número 9 se escribe exactamente de dos maneras distintas:

   $9 = 4 + 5$

   $9 = 2 + 3 + 4$

5. **(2006)** Las dimensiones de un paralelepípedo de madera son enteras. Pintamos toda su superficie (las seis caras), lo cortamos mediante planos paralelos a las caras en cubos de una unidad de arista y observamos que exactamente la mitad de los cubos no tienen ninguna cara pintada. Probar que el número de ortoedros con tal propiedad es finito.

   (Puede resultar útil tener en cuenta que $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 1,79\ldots < 1,8$).

6. **(2005)** ¿Es posible colorear los puntos del plano cartesiano Oxy de coordenadas enteras con tres colores, de tal modo que cada color aparezca infinitas veces en infinitas rectas paralelas al eje Ox y tres puntos cualesquiera, cada uno de distinto color, no estén alineados? Justificar la contestación.

7. **(2004)** Tenemos un conjunto de 221 números reales cuya suma es 110721. Los disponemos formando una tabla rectangular de modo que todas las filas y la primera y última columnas son progresiones aritméticas de más de un elemento. Probar que la suma de los elementos de las cuatro esquinas vale 2004

8. **(2002)** Se consideran 2002 segmentos en el plano tales que la suma de sus longitudes es la unidad. Probar que existe una recta r tal que la suma de las longitudes de las proyecciones de los 2002 segmentos dados sobre r es menor que $\frac{2}{3}$.

9. **(2002)** En un polgono regular H de $6n + 1$ lados (n entero positivo), R vértices se pintan de rojo y el resto de azul. Demostrar que el número de triángulos isósceles que tienen sus tres vértices del mismo color no depende del modo de distribuir los colores en los vértices de H.

10. **(2001)** Se tienen cinco segmentos de longitudes a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 tales que con tres cualesquiera de ellos es posible construir un triángulo. Demostrar que al menos uno de esos triángulos tiene todos sus ángulos agudos.

11. **(2001)** Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de una tabla 3×3. Después se suman seis números de tres cifras: los tres que se leen en filas de izquierda a derecha y los tres que se leen en columnas de arriba abajo.
    ¿Hay alguna distribución para la cual el valor de esa suma sea 2001?